Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen I	Lernzielkarten

Gib die maximal mögliche Definitionsmenge der folgenden Funktionen an und untersuche das Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken. Bestimme die Grenzwerte und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten, soweit vorhanden.

$$f: x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$g: x \mapsto \frac{x^2-6x+8}{3x^2-9x-12}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen I	Lernzielkarten

Lösung zur Funktion f:
$x = 1$ ist die einzige Nullstelle des Nenners, also ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Für das Verhalten von f an der Definitionslücke gilt für die beiden Grenzwerte:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} \to +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} \to +\infty$$

Daher besitzt f an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Die Gleichung der senkrechten Asymptote lautet $x = 1$.

Lösung zur Funktion g:
Die Nullstellen des Nenners sind mögliche Polstellen. Durch geschickte Faktorisierung erhält man $g(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{3(x+1)(x-4)}$. Also ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 4\}$.
Durch Kürzen erhält man $g(x) = \frac{(x-2)}{3(x+1)}$. $x = -1$ ist die einzige Definitionslücke, die als Polstelle in Frage kommt. Wie oben berechnet man die beiden Grenzwerte:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(x-2)}{3(x+1)} = \frac{-3}{0^-} \to +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{(x-2)}{3(x+1)} = \frac{-3}{0^+} \to -\infty$$

Daher besitzt g an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Die Gleichung der senkrechten Asymptote lautet $x = -1$.

Die Theorie ist im Buch auf S. 8ff, weitere Aufgaben unter S.12 / 5; 9; 10

Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen II a	Lernzielkarten

Untersuche das Verhalten der folgenden gebrochen rationalen Funktionen im Unendlichen und gib alle linearen Asymptoten an.

$$f: x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$g: x \mapsto \frac{2x^2}{4x^2 - 1}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen II a	Lernzielkarten

Zur Erinnerung: Der Zähler- bzw. Nennergrad entspricht dem höchsten Exponenten der Polynomfunktion im Zähler bzw. Nenner.

Lösung zur Funktion f:
Zählergrad z < Nennergrad n. Ausklammern und Kürzen der höchsten Potenz x² ergibt:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \cdot \frac{2}{x}}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Nenner gegen Null und der Zähler gegen 1, also ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet $y = 0$.

Lösung zur Funktion g:
Zählergrad z = Nennergrad n. Ausklammern und Kürzen der höchsten Potenz x² ergibt

$$g(x) = \frac{2x^2}{4x^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2(4 - \frac{1}{x^2})} = \frac{2}{4 - \frac{1}{x^2}}$$

Für $x \to \pm\infty$ ergibt sich $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \frac{2}{4-0} = \frac{1}{2}$
Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet $y = \frac{1}{2}$.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen II b	Lernzielkarten

Untersuche das Verhalten der folgenden gebrochen rationalen Funktionen im Unendlichen und gib alle linearen Asymptoten an.

$$h: x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{2x - 1}$$

$$i: x \mapsto \frac{2x^4}{4x^2 - 1}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Verhalten gebrochen rationaler Funktionen II b	Lernzielkarten

Lösung zur Funktion h:
Zählergrad z = Nennergrad n+1.
Da $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \pm\infty$, kann keine waagrechte Asymptote vorliegen. Wenn man mittels Polynom-division den Zähler durch den Nenner teilt, erhält man

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x - 1} = \frac{1}{2}x + 1{,}25 + \frac{1{,}25}{2x - 1}$$

Der letzte Bruch strebt für $x \to \pm\infty$ gegen Null, so dass nur ein linearer Term $y = \frac{1}{2}x + 1{,}25$ übrig bleibt. Dies ist die Gleichung der schrägen Asymptote.

Lösung zur Funktion i:
Zählergrad z > Nennergrad n+1.
Wenn man eine Polynomdivision durchführen würde, bliebe nach Bildung des Grenzwertes mindestens ein quadratischer Term übrig, so dass es in diesem Fall keine lineare Asymptote geben kann.

Die Theorie ist im Buch auf S. 14f, weitere Aufgaben unter S.16 / 2; 7

Klasse	Thema	Typ
Q11	Differenzenquotient	Lernzielkarten

Gegeben ist die Funktion f mit $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2; x \in \mathbb{R}$

Berechne die mittlere Änderungsrate von f in den Intervallen $[2;3]$; $[2;4]$; $[4;6]$ und $[2;10]$.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Differenzenquotient	Lernzielkarten

Zur Berechnung der mittleren Änderungsrate wird der Differenzenquotient verwendet:

$$[2;3]:\ \ m_1 = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{5{,}75 - 5}{1} = 0{,}75;$$

$$[2;4]:\ \ m_3 = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{6 - 5}{2} = 0{,}5;$$

$$[4;6]:\ \ m_3 = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{5 - 6}{2} = -0{,}5;$$

$$[2;10]:\ \ m_4 = \frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \frac{-3 - 5}{8} = -1;$$

Die Theorie ist im Buch auf S. 28f, weitere Aufgaben unter S.29 / 2

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Ableitungsfunktion I	Lernzielkarten

Leite folgende Funktionen nach x ab:

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x^{-4}$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{2x^2}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Ableitungsfunktion I	Lernzielkarten

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 4x - 12x^{-5}$$

$$h'(x) = 2ax - \frac{b}{x^3}$$

Die Theorie ist im Buch auf S. 47 (Ableitung von x^n), S. 49 (Summen und Faktorregel), weitere Aufgaben unter S.51 / 3; 4; 6

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Ableitungsfunktion II	Lernzielkarten

Leite folgende Funktionen nach x ab:

$$f(x) = (2x^2 - 1)(x - 3x^2)$$

$$g(x) = 5x(2x^2 + 1)$$

$$h(x) = \frac{3x}{x - 1}$$

$$i(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Ableitungsfunktion II	Lernzielkarten

$$f'(x) = 4x(x - 3x^2) + (2x^2 - 1)(1 - 6x) = \ldots = -24x^3 + 6x^2 + 6x - 1$$

$$g'(x) = 5(2x^2 + 1) + 5x \cdot 4x = 30x^2 + 5$$

$$h'(x) = \frac{3(x - 1) - 1 \cdot 3x}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$$

$$i'(x) = \frac{(2x - 5)(2x^2 + 3) - 4x(x^2 - 5x + 1)}{(2x^2 + 3)^2} = \frac{10x^2 + 2x - 15}{(2x^2 + 3)^2}$$

Die Theorie ist im Buch auf S. 53f (Produkt- und Quotientenregel), weitere Aufgaben unter S.55 / 3; 4; 7

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Stammfunktion	Lernzielkarten

Zeige, dass F eine Stammfunktion zu f ist:

$$f(x) = 3x^4 + 2 \quad \text{und} \quad F(x) = 0{,}6x^5 + 2x - 18$$

$$f(x) = \frac{8x^2 + 12x}{(4x+3)^2} \quad \text{und} \quad F(x) = \frac{2x^2}{4x+3}$$

Gib eine weitere Stammfunktion zu den beiden Funktionen f an.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Die Stammfunktion	Lernzielkarten

Der Nachweis erfolgt durch Ableiten der potentiellen Stammfunktion:

$$F'(x) = 0{,}6 \cdot 5x^4 + 2 = 3x^4 + 2$$

Eine weitere Stammfunktion ist z.B.:

$$F(x) = 0{,}6x^5 + 2x + 2$$

$$F'(x) = \frac{4x(4x+3) - 4 \cdot 2x^2}{(4x+3)^2} = \frac{8x^2 + 12x}{(4x+3)^2}$$

Eine weitere Stammfunktion ist z.B.:

$$F(x) = \frac{2x^2}{4x+3} + 5 = \frac{2x^2 + 20x + 15}{4x+3}$$

Die Theorie ist im Buch auf S. 45 (Stammfunktion), weitere Aufgaben unter S.46 / 2.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Tangentengleichungen	Lernzielkarten

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^4 + 2$
an der Stelle $x = 1$.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Tangentengleichungen	Lernzielkarten

Schritt 1: Bestimmung der Steigung m der Tangente $y = mx + t$

$$f'(x) = 12x^3 \quad \text{und} \quad \text{m} = f'(1) = 12$$

Schritt 2: Bestimmung des Parameters t: Der Graph von f und die Tangente haben den Punkt (1 / f(1)) gemeinsam: f(1)=5, also sind die Koordinaten des gemeinsamen Punktes (1 / 5).
Einsetzen in die Tangentengleichung ergibt

$$5 = 12 \cdot 1 + t$$

Damit ergibt sich t= -7 und die Tangentengleichung lautet

$$y = 12x - 7$$

Weitere Aufgaben unter S.48 / 6, S. 57/13, 14 und S. 61/7

Klasse	Thema	Typ
Q11	Monotonietabelle	Lernzielkarten

Bestimme die Monotoniebereiche der folgenden Funktionen im maximalen Definitionsbereich.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$g(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Monotonietabelle	Lernzielkarten

Schritt 1: Bestimmung der Ableitungsfunktion und der Nullstellen der Ableitung, bzw. der Definitionslücken bei gebrochen rationalen Funktionen.

$$f'(x) = x^2 - 1; \quad x^2 - 1 = 0; \quad => \quad x_{1,2} = \pm 1;$$

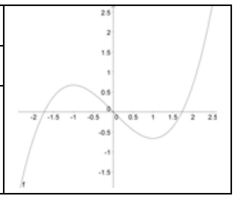
$$g'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}; \quad \frac{-1}{(x-2)^2} = 0; \quad <=> \quad -1 = 0; \quad ERROR$$

$\text{es existiert keine Lösung, d.h.die Ableitung besitzt keine Nullstellen}$

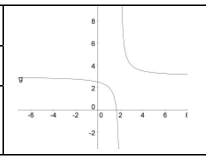
Mögliche Stellen, an denen sich das Monotonieverhalten ändern kann, sind die Definitionslücken, also beispielsweise die Nullstellen des Nenners => $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Schritt 2: Bestimmung der Monotonietabelle:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'(x)	>0	=0	<0	=0	>0
G_f	Steigt	HOP (lokal)	Fällt	TIP (lokal)	Steigt



x	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
g'(x)	<0	=0	>0
G_g	Fällt	Def.Lücke	Fällt



Theorie: S. 64ff.
Weitere Aufgaben: S. 66 / 5, 6, 9.

Klasse	Thema	Typ
Q11	Extremstellen und Extremwerte	Lernzielkarten

Gegeben sind die folgenden Funktionen. Gib deren Extremstellen sowie die Art der Extrema an.

$$f: x \mapsto x^4 - 2x^3 - 1$$

$$g: x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

Klasse	Thema	Typ
11	Extremstellen und Extremwerte	Lernzielkarten

Lösung zur Funktion f:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2; \quad 4x^3 - 6x^2 = 0; <=> \quad x^2(4x - 6) = 0; \quad => \quad x_{1,2} = 0; \quad x_3 = 1{,}5;$$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1{,}5$	$x = 1{,}5$	$x > 1{,}5$
$f'(x)$	< 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
G_f	Fällt	Terrassenpunkt	Fällt	TIP (global)	Steigt

Lösung zur Funktion g: (Definitionslücke bei $x = 0$).

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0; <=> \quad x^2 - 1 = 0; \quad => \quad x_{1,2} = \pm 1;$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0		< 0	$= 0$	> 0
G_g	Steigt	HOP (lokal)	Fällt	Def.Lücke	Fällt	TIP (lokal)	Steigt

Die Theorie ist im Buch auf S. 68ff, weitere Aufgaben unter S.72 / 2, 4

Klasse	Thema	Typ
Q11	Nullstellen bestimmen	Lernzielkarten

1) In welchen Situationen kann es nötig sein, die Nullstellen einer Funktion zu bestimmen?

2) Mit welchen Verfahren kann man die Nullstellen der folgenden Funktionen bestimmen?

$$f(x) = (x+3)(x-2)$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$h(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$$

$$i(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$k(x) = x^3 + x - 1$$

Klasse	Thema	Typ
Q11	Nullstellen bestimmen	Lernzielkarten

Lösung zu 1)

- f(x)=0: Man sucht die x-Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet.
- f'(x)=0: Man sucht die x-Stellen, an denen die Ableitungsfunktion eine Nullstelle hat und wo der Graph der Ausgangsfunktion eventuell eine Extremstelle besitzt.
- N(x)=0: Man sucht die Nullstellen des Nenners bei gebrochen rationalen Funktionen, um die Definitionslücken zu finden.
- Und und und….

Lösung zu 2)

f(x): Die Funktion ist bereits in Linearfaktoren zerlegt, die Nullstellen ($x = -3; x = 2$) können direkt abgelesen werden.

g(x): Durch Erkennen der zweiten binomischen Formel oder durch Anwenden der Lösungsformel („Mitternachtsformel“) für quadratische Gleichungen erhält man $x_{1,2} = 2$.

h(x): Durch Ausklammern erhält man $h(x) = x^2 \cdot (x^2 + 3x - 4)$; Die Nullstellen erhält man wie zuvor: $x_{1,2} = 0$; $x_3 = -1$; $x_4 = 4$.

i(x): Da jede Nullstelle ein Teiler des konstanten Terms sein muss, kann man die Nullstelle $x = 1$ erraten. Weitere Nullstellen kann man mittels Polynomdivision suchen (nicht klausurrelevant).

k(x): Die Nullstellen dieser Funktion sind nur mit höherer Mathematik oder numerisch mittels Computereinsatzes bestimmbar (z.B. Newton-Verfahren!)