Musterlösung für die 1.Klausur aus der Mathematik

① a) Falsche Quotientenregel: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)}{v'(x)}$

Gegenbeispiel: z.B. $u(x) = x,\ v(x) = x$ mit $u'(x) = 1,\ v'(x) = 1$

$\Rightarrow \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x}{x} = 1$ ❶ Aufstellen eines Gegenbeispiels

$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = [1]' = 0$ ❷ Berechnung der korrekten Ableitung

aber: $\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1}{1} = 1$ ❷ Berechnung der falschen Ableitung

$\Rightarrow$ Die Ableitungsregel liefert ein falsches Ergebnis ❶ Vergleich/Argumentation

① b) Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ❶

Quotientenregel: $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ ❶

❶ Angabe von $f(x),\ g(x)$

②

$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$	BE
$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2, \quad x_0 = -2$	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 1, \quad x_0 = 1$	
$n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	$n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	❶
$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) + 2$	$f(1) = 1 + 4 + 4 - 1$	
$= -8 - 4 + 2 + 2 = -8$	$= 8$	❶
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$	$f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$	❷
$f'(-2) = 12 + 4 - 1 = 15$	$f'(1) = 3 + 8 + 4 = 15$	❶
$x_1 = -2 + \frac{8}{15} = -\frac{22}{15}$	$x_1 = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$	❶
$\approx -1{,}47$	$\approx 0{,}47$	❶
$f(x_1) = \cdots = -1{,}84 \quad \text{P}_1(-1{,}47 \mid -1{,}84)$	$f(x_1) = \cdots = 1{,}84 \quad \text{P}_1(0{,}47 \mid 1{,}84)$	❶
x_1 in Graph eingezeichnet		❶
P_1 in Graph eingezeichnet		❶
Tangente in P_0 in Graph eingezeichnet (Achsenschnittpunkt x_1)		❷
Tangente in P_1 in Graph eingezeichnet		❷
Achsenschnittpunkt der zweiten Tangente als x_2 bezeichnet		❷

③

$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$
$f(x) = \frac{x-7}{(x-\sqrt{7})^n}$ mit n ungerade	$f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-5)^n}$ mit n ungerade

❷ Zuordnung NS $\leftrightarrow$ NS Zähler und PS $\leftrightarrow$ NS Nenner
❶ Korrektes Vorzeichen $(x - x_0)$
❶ Potenz im Zähler korrekt
❶ Potenz im Nenner korrekt

④

A	B	BE
$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(\frac{x^2}{9} - 2\right)$	$f(x) = \frac{x^2}{2}\left(2 - \frac{x^2}{4}\right)$	
$= \frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2$	$= x^2 - \frac{1}{8}x^4$	
$f'(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{3}x$	$f'(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$	❹
$= \frac{4}{27}x\left(x^2 - 9\right) = \frac{4}{27}x\,(x+3)\,(x-3)$	$= \frac{1}{2}x\left(4 - x^2\right) = -\frac{1}{2}x\,(x+2)\,(x-2)$	
$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$	
$\Rightarrow$ NS: $x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$	$\Rightarrow$ NS: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$	❸

alternativ mit Produktregel:

A	B	BE
$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(\frac{x^2}{9} - 2\right)$	$f(x) = \frac{x^2}{2}\left(2 - \frac{x^2}{4}\right)$	
$f'(x) = \frac{2x}{3}\left(\frac{x^2}{9} - 2\right) + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{2x}{9}$	$f'(x) = x\left(2 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)$	
$= \frac{2x^3}{27} - \frac{4x}{3} + \frac{2x^3}{27}$	$= 2x - \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4}$	
$= \frac{4x^3}{27} - \frac{4x}{3}$	$= 2x - \frac{x^3}{2}$	❹
$= \frac{4}{27}x\left(x^2 - 9\right) = \frac{4}{27}x\,(x+3)\,(x-3)$	$= \frac{1}{2}x\left(4 - x^2\right) = -\frac{1}{2}x\,(x+2)\,(x-2)$	
$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$	
$\Rightarrow$ NS: $x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$	$\Rightarrow$ NS: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$	❸

Monotonietabelle:

A

x	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$\ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \ominus$	$\ominus \cdot \oplus \cdot \ominus = \oplus$	$\oplus \cdot \oplus \cdot \ominus = \ominus$	$\oplus \cdot \oplus \cdot \oplus = \oplus$
G_f ❸	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Art d. Ex. ❸	Min bei $x = -3$	Max bei $x = 0$	Min bei $x = 3$
$f(x)$	-3	0	-3
Lage d. Ex. ❷	$(-3\|-3)$	$(0\|0)$	$(3\|-3)$

B

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$\oplus \cdot \ominus \cdot \ominus = \oplus$	$\oplus \cdot \oplus \cdot \ominus = \ominus$	$\ominus \cdot \oplus \cdot \ominus = \oplus$	$\ominus \cdot \oplus \cdot \oplus = \ominus$
G_f ❸	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Art d. Ex. ❸	Max bei $x = -2$	Min bei $x = 0$	Max bei $x = 2$
$f(x)$	2	0	2
Lage d. Ex. ❷	$(-2\|2)$	$(0\|0)$	$(2\|2)$

⑤

A	B	BE
a: nein - eine der folgenden Begründungen: • a hat keine NS bei $x = 0$ (Terrassenpunkt von f) • a hat keine NS bei $x = \pm 2$ (Extrema von f) • $a(x) < 0$ für $x < -2$ und $x > 2$ (G_f steigt dort)	a: nein - eine der folgenden Begründungen: • $a(x) > 0$ für $\sqrt{2} < x < 0$ (G_f fällt dort) • $a(x) < 0$ für $\sqrt{2} < x < 2$ (G_f steigt dort) • $a(x) > 0$ für $x > 2$ (G_f fällt dort)	❶ ❶
b: nein - eine der folgenden Begründungen: • $b(x) > 0$ für $-2 < x < 0$ (G_f fällt dort) • fehlende Symmetrie: G_f ist punktsymmetrisch, $\mathrm{G}_{f'}$ muss achsensymmetrisch sein • nahe $x = 0$ müsste $f'(x)$ ebenfalls annähernd 0 sein, da G_f hier sehr flach verläuft	c: nein - eine der folgenden Begründungen: • c hat keine NS bei $x = \pm 2$ (Extrema von f) • $c(x) < 0$ für $x < -2$ und $x > 2$ (G_f steigt dort)	❶ ❶
c: nein - eine der folgenden Begründungen: • c hat keine NS bei $x = \pm 2$ (Extrema von f) • $c(x) > 0$ für $-2 < x < -1$ und $1 < x < 2$ (G_f fällt dort)	d: nein - eine der folgenden Begründungen: • $d(x) < 0$ für $\sqrt{2} < x < 2$ (G_f steigt dort) • $d(x) > 0$ für $x > 2$ (G_f fällt dort) • fehlende Symmetrie: G_f ist achsensymmetrisch, $\mathrm{G}_{f'}$ muss punktsymmetrisch sein • nahe $x = 0$ müsste $f'(x)$ ebenfalls annähernd 0 sein, da G_f hier sehr flach verläuft	❶ ❶
e: nein - Begründung: e hat keine PS / DL bei $x = \pm 1$ (Ableitung kann keine größere Definitionsmenge haben als die Ausgangsfunktion)	e: nein - Begründung: e hat keine PS / DL bei $x = \pm 1$ (Ableitung kann keine größere Definitionsmenge haben als die Ausgangsfunktion)	❶ ❶
d: ja - Begründung: • $x \in]-\infty; -2[$: G_f steigt $\Leftrightarrow d(x) > 0$ • $x \in]-2; -1[$: G_f fällt $\Leftrightarrow d(x) < 0$ • $x \in]-1; 1[$: G_f fällt $\Leftrightarrow d(x) < 0$ • $x \in]1; 2[$: G_f fällt $\Leftrightarrow d(x) < 0$ • $x \in]2; \infty[$: G_f steigt $\Leftrightarrow d(x) > 0$	b: ja - Begründung: • $x \in]-\infty; -2[$: G_f steigt $\Leftrightarrow b(x) > 0$ • $x \in]-2; -\sqrt{2}[$: G_f fällt $\Leftrightarrow b(x) < 0$ • $x \in]-\sqrt{2}; 0[$: G_f fällt $\Leftrightarrow b(x) < 0$ • $x \in]0; \sqrt{2}[$: G_f steigt $\Leftrightarrow b(x) > 0$ • $x \in]\sqrt{2}; 2[$: G_f steigt $\Leftrightarrow b(x) > 0$ • $x \in]2; \infty[$: G_f fällt $\Leftrightarrow b(x) < 0$	❶ ❻

Wenn die x-Koordinaten der NS oder PS anders geschätzt wurden (z.B. 1,4 oder 1,5 statt $\sqrt{2}$) gab es natürlich <u>keinen</u> Punktabzug.

In der Aufgabe war nach den Monotoniebereichen gefragt. Wenn bei der korrekten Ableitung nur die Extrema und Polstellen betrachtet wurden, gab es dafür lediglich ❹ statt ❻ BE.