Beliebte Fehler in der Klausur

1) Runden auf n Nachkommastellen (NKS)

a) $\frac{7}{15}$ (2 NKS)
$= 0{,}4\bar{6}$
$\approx 0{,}47$
nicht 0,46

b) $\frac{7}{15}$ (3 NKS)
$= 0{,}4\bar{6}$
$\approx 0{,}467$
nicht 0,466

c) $-\frac{22}{15}$ (2 NKS)
$= -1{,}4\bar{6}$
$\approx -1{,}47$
nicht -1,46

d) $-\frac{22}{15}$ (3 NKS)
$= -1{,}4\bar{6}$
$\approx -1{,}467$
nicht -1,466

e) π (4 NKS)
$= 3{,}14159265\ldots$
$\approx 3{,}1416$
nicht 3,1415

2) Gib die Quotientenregel an

richtig: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

richtig: $f = \frac{u}{v} \;\Rightarrow\; f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

falsch: $\frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

falsch: $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

richtig: $f(x) = \frac{v(x)}{u(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{u(x)\cdot v'(x) - u'(x)\cdot v(x)}{[u(x)]^2}$

richtig: $f(x) = \frac{\text{Hans}}{\text{Wurst}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{\text{Hans}'\cdot\text{Wurst} - \text{Hans}\cdot\text{Wurst}'}{\text{Wurst}^2}$

3) 3. binomische Formel

richtig: $f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) = -3x\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

falsch: $f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) = -3x\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2$

richtig: $f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad$ Nullstellen: $x_1 = 0,\; x_2 = \frac{7}{3},\; x_3 = -\frac{7}{3}$

richtig: $f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad$ Nullstellen: $x_1 = 0,\; x_{2,3} = \pm\frac{7}{3}$

falsch: $f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad$ Nullstellen: $x_1 = 0,\; x_2 = \frac{7}{3}$

richtig: $f(x) = x^3 - 6x = x(x^2-6) = x\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)$

falsch: $f(x) = x^3 - 6x = x(x^2-6) = x(x+2)(x-3)$

4) Nullstellen

richtig: $f(x) = x(x+2)(x-3) \quad\Rightarrow\quad$ Nullstellen: $x_1 = 0,\; x_2 = -2,\; x_3 = 3$

falsch: $f(x) = x(x+2)(x-3) \quad\Rightarrow\quad$ Nullstellen: $x_1 = 0,\; x_2 = 2,\; x_3 = -3$

5) Unterscheidung Nullstellen / Definitionslücken

$f(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) = -3x\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

richtig: Nullstellen $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\frac{7}{3}$

falsch: $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right\}$

(Gilt genauso für Nullstellen von $f'(x)$, also potentielle Extremstellen von $f(x)$).

6) Wann brauche ich die Quotientenregel? Wann reicht die Faktorregel?

$f(x) = \frac{x^4}{27}$

richtig und schön kurz: $f(x) = \frac{1}{27}x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{27} \cdot 4x^3 = \frac{4}{27}x^3$

richtig, aber unnötig kompliziert: $u(x) = x^4,\ v(x) = 27 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 4x^3,\ v'(x) = 0$
$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x^3 \cdot 27 - x^4 \cdot 0}{27^2} = \frac{27 \cdot 4x^3}{27^2} = \frac{4x^3}{27} = \frac{4}{27}x^3$

falsch: $u(x) = x^4,\ v(x) = 27 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 4x^3,\ v'(x) = 1$
$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x^3 \cdot 27 - x^4 \cdot 1}{27^2} = \ldots$

falsch: keine Gedanken zu $v(x),\ v'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x^3 \cdot 27 - x^4}{27^2} = \ldots$

7) Bruchrechnung – gesammelte Fehler

$\frac{x^2}{3}\left(\frac{x^2}{9} - 2\right) \neq \frac{x^4}{27} - \frac{x^2}{6}$

$\frac{x^2}{3}\left(\frac{x^2}{9} - 2\right) \neq \frac{x^4}{27} - \frac{2x^2}{6}$

$\frac{x^4}{27} - \frac{x^2}{6} \neq \frac{x^2}{21}$

8) Ableitung einer Konstante

richtig: $f(x) = \frac{x^2}{9} - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{9}$

falsch: $f(x) = \frac{x^2}{9} - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{9} - 2$

9) Grenzwert-Schreibweise bei Polstelle mit VZW an der Stelle $x = \sqrt{7}$

richtig: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \sqrt{7}} = +\infty \quad / \quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \sqrt{7}} = -\infty$

falsch: $\lim\limits_{x \to -\sqrt{7}} = +\infty \quad / \quad \lim\limits_{x \to \sqrt{7}} = -\infty$

10) Produktregel erkennen (oder geschickt umgehen)

$f(x) = \frac{x^2}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{9} - 2\right)$

richtig (geschickt): $f(x) = \frac{x^4}{27} - \frac{2x^2}{3} = \frac{1}{27}\,x^4 - \frac{2}{3}\,x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{27}\,x^3 - \frac{4}{3}\,x$

richtig (umständlich): Produktregel: $u(x) = \frac{x^2}{3},\ v(x) = \frac{x^2}{9} - 2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{2x}{3},\ v'(x) = \frac{2x}{9}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{9} - 2\right) + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{2x}{9} = \frac{2x^3}{27} - \frac{4x}{3} + \frac{2x^3}{27} = \frac{4}{27}\,x^3 - \frac{4}{3}\,x$

falsch: $f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot \frac{2x}{9}$

11) Korrekte Schreibweise der Monotonietabelle

$f'(x) = 7x - 3x^3 = -3x\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{7}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

richtig:

x	$x < -\sqrt{\frac{7}{3}}$	$-\sqrt{\frac{7}{3}} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{\frac{7}{3}}$	$x > \sqrt{\frac{7}{3}}$
$f'(x)$	(+)(-)(-) = (+)	(+)(-)(+) = (-)	(-)(-)(+) = (+)	(-)(+)(+) = (-)
G_f	steigt	fällt	steigt	fällt

gerade noch erlaubt:

x	$< -\sqrt{\frac{7}{3}}$	von $-\sqrt{\frac{7}{3}}$ bis 0	von 0 bis $\sqrt{\frac{7}{3}}$	$> \sqrt{\frac{7}{3}}$
$f'(x)$	$f'(-10) = 2930 > 0$	$f'(-1) = -4 < 0$	$f'(1) = 4 > 0$	$f'(10) = -2930 < 0$
G_f	steigt	fällt	steigt	fällt

falsch:

$< -\sqrt{\frac{7}{3}}$	$-\sqrt{\frac{7}{3}} > 0$	$0 > \sqrt{\frac{7}{3}}$	$> \sqrt{\frac{7}{3}}$
+	-	+	-
steigt	fällt	steigt	fällt

falsch:

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	+	-
	Minimum		Maximum

12) Formulierungen

$f'(x) = 0$ oder $f'(x) = 1$ bedeutet NICHT: "keine Ableitung“ oder "keine Steigung“. Eine negative Steigung oder eine Steigung 0 ist auch eine Steigung!

"Keine Steigung“ könnte man höchstens bei Definitionslücken sagen.

13) Verwechslung von NS / Extrema

$f(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) = x^2 - \frac{1}{8}\,x^4$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{2}\,x^3 = \frac{1}{2}\,x(4 - x^2) = \frac{1}{2}\,x(2 - x)(2 + x) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$

richtig: $\quad f(0) = 0,\ f(-2) = 2,\ f(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ Extrema $E_1(0|0),\ E_2(-2|2),\ E_3(2|2)$

falsch: $\quad f'(0) = 0,\ f'(-2) = 0,\ f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen $N_1(0|0),\ N_2(-2|0),\ N_3(2|0)$

14) Schreibweise bei Anwenden der "falschen Quotientenregel"

gut: Berechnung von $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'$ und $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ und dann Vergleich der beiden Ergebnisse:

$u(x) = x^2,\ v(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x,\ v'(x) = 1$

$\Rightarrow \quad \left[\frac{x^2}{x}\right]' = [x]' = 1$ und $\frac{2x}{1} = 2x \quad \Rightarrow \quad$ verschiedene Funktionen

gut: zu zeigen: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}$

schlecht: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)}{v'(x)}$

15) Komplizierte Ableitungen (wenn sie je drankommen sollten)

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)}$

Am einfachsten ist es natürlich, zunächst auszumultiplizieren und evtl. zu kürzen. Vielleicht braucht man danach weder die Produkt- noch die Quotientenregel. Aber wenn das nicht geht oder man stur nach Vorschrift rechnet ohne sich das Leben einfacher zu machen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{a(x)}{b(x)}\right]' \cdot \frac{c(x)}{d(x)} + \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \left[\frac{c(x)}{d(x)}\right]' \qquad \text{(Produktregel)} \\ &= \frac{a'b - ab'}{b^2} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{c'd - cd'}{d^2} \qquad \text{(zweimal Quotientenregel)} \end{aligned}$$

Ein Beispiel (für das man eigentlich weder PR noch QR braucht, wenn man ausmultipliziert):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) \\ f'(x) &= \left[\frac{x^2}{2}\right]' \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \left[2 - \frac{x^2}{4}\right]' \\ &= \frac{2x \cdot 2 - x^2 \cdot 0}{2^2} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{2x \cdot 4 - x^2 \cdot 0}{4^2}\right) \\ &= \frac{2x \cdot 2}{2^2} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{2x \cdot 4}{4^2}\right) \\ &= x \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{2} \\ &= 2x - \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} \\ &= 2x - \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

16) Nicht offensichtliche NS / PS

$f(x) = \frac{(x-2)^2+15}{(x-5)-3}$ hat NICHT bei 2 eine NS und bei 5 eine PS!

Beweis:

$f(x) = \frac{x^2-4x+4+15}{x-8} = \frac{x^2-4x+19}{x-8}$

Die Polstelle liegt bei $x = 8$. Wendet man die Mitternachtsformel auf das Polynom im Zähler an, so stellt man fest, dass dieses keine reelle Nullstelle hat. Die ganze Funktion f hat also keine Nullstelle!

17) Was ist ein Wendepunkt?

Ein Wendepunkt ist ein Punkt, an dem die Funktion ihre *Krümmung* ändert, z.B. von rechtsgekrümmt in linksgekrümmt. Das ist NICHT dasselbe wie ein Extremum! Wendepunkte sind erst Thema am Anfang der Q12. Also bitte bis dahin gedulden und das Wort Wendepunkt NICHT verwenden, wenn ihr ein Extremum meint. An einer Extremstelle ändert die Funktion ihre Krümmung NICHT. Ein Terrassenpunkt wäre hingegen ein Wendepunkt. Ein Wendepunkt muss aber nicht unbedingt ein Terrassenpunkt sein. Aber wie gesagt, dazu kommt ihr noch früh genug.

18) Was ist der Plural von Extrema?

Extrema IST bereits der Plural. Der Singular lautet Extremum.

Ein Extremum. Viele Extrema. Das Wort "Extremas“ gibt es nicht. Bitte aus eurem Wortschatz streichen. Am besten zusammen mit Maximas, Minimas, Visas, Praktikas, Lexikas...

19) Kürzen!!!

Bei $f'(x) = \frac{(4x^3-36x)\cdot 27-(x^4-18x^2)\cdot 0}{27^2}$ kann man viel kürzen!!

geschickt: $f'(x) = \frac{(4x^3-36x)\cdot 27}{27^2} = \frac{4x^3-36x}{27} = \frac{4x^3}{27} - \frac{36x}{27} = \frac{4x^3}{27} - \frac{4x}{3}$.

ungeschickt: In den Taschenrechner eintippen $\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{108x^3-972x}{729}$

20) Die Ordnung einer Pol- oder Nullstelle

Eine Nullstelle n-ter Ordnung ist eine Nullstelle, die man in faktorisierter Form so schreiben kann: $(x - x_0)^n$

Bei einer Nullstelle *ungerader* Ordnung ändert sich das Vorzeichen von $x < x_0$ nach $x > x_0$.

Bei einer Nullstelle *gerader* Ordnung ändert sich das Vorzeichen NICHT, da man immer einen quadratischen Term hat, der auf jeden Fall positiv ist. Wenn insgesamt ein Minus davorsteht, ist der Term immer negativ. Auf jeden Fall ändert er sein Vorzeichen beim Überschreiten der Nullstelle nicht: $(x-x_0)^{2m} = [(x-x_0)^m]^2$ bzw. $-(x-x_0)^{2m} = -[(x-x_0)^m]^2$.

Eine Polstelle ist eine Nullstelle im Nenner, daher gilt für sie das oben genannte analog.

21) Parabelform

Funktionen der Form $ax^2 + bx + c$ sind Parabeln. Sonst nichts. Polynome 4.Grades mit nur geraden Exponenten haben zwar auch nur ein Extremum, aber sie sind NICHT parabelförmig. Sie schmiegen sich im Bereich des Scheitelpunktes enger an die Tangente (ggf. die x-Achse) an.

22) Intervallschreibweise

- "Unendlich" ist NICHT in den reellen Zahlen enthalten. Daher kann $\pm\infty$ auch nicht in einem Intervall enthalten sein, der eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ darstellt. Also insbesondere Monotonieintervalle, die Teilmengen der Definitionsmenge einer Funktion sind, die wiederum Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.
- Wenn es um Monotoniebereiche geht, gehören die Polstellen definitiv auch NICHT in die Intervalle hinein. An den Polstellen ist die Funktion nicht definiert. Daher kann man dort auch nicht von ihrer Monotonie sprechen.
- Eckige Klammer nach innen bedeutet, die Zahl ist noch im Intervall enthalten. Eckige Klammer nach außen bedeutet, die Zahl ist gerade nicht mehr im Intervall enthalten.

Die Funktion $f(x) = \frac{x-2}{x-5}$ lässt sich also in die folgenden Monotoniebereiche einteilen:

- $]-\infty;2]$ oder $]-\infty;2[$ - aber NICHT $[-\infty;2[$
- $[2;5[$ oder $]2;5[$ - aber NICHT $[2;5]$
- $]5;\infty[$ (keine Alternative)

23) Zwischenschritte

Wenn ihr eure Zwischenschritte (z.B. welche Zahlen ihr in den Taschenrechner eintippt) nicht hinschreibt, kann es dafür keine Punkte geben. Wenn ihr euch vertippt und das Endergebnis dadurch falsch ist, lässt sich nicht nachvollziehen, wo das Ergebnis herkam.

Zum Beispiel kann es keine Punkte geben auf eine Monotonietabelle, in der nur $f' > 0$ und $f' < 0$ steht, wenn das für den angegebenen Bereich nicht immer stimmt.

Beispiel:

Die Nullstelle von f liegt bei 2, ihr habt euch aber verrechnet und 4 herausbekommen.

Eure Monotonietabelle:

x	$x < 4$	$x > 4$
$f'(x)$	< 0	< 0

Wenn ihr dazuschreibt, dass ihr die Werte 3 und 5 in f' eingesetzt habt (die ja beide auf der gleichen Seite der echten Nullstelle 2 liegen), kann das noch Punkte geben.