

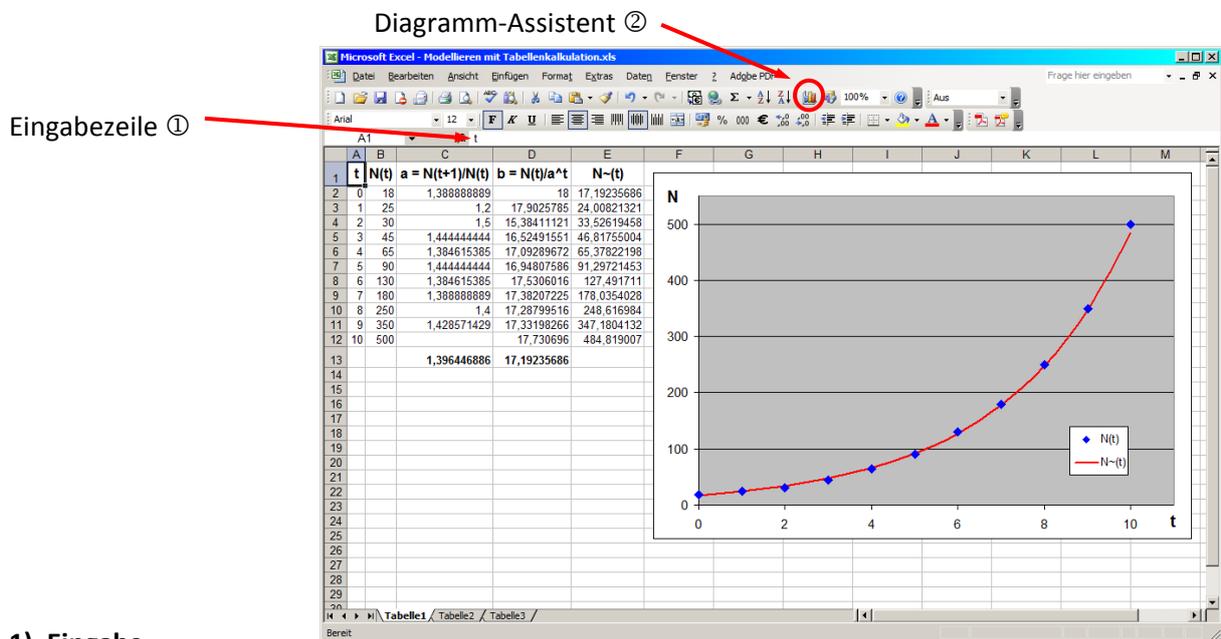
Modellierung mit Hilfe einer Tabellenkalkulation

Problemstellung: Bakterienwachstum

In einem Experiment wird eine Bakterienkultur angesetzt und täglich die Bakterienpopulation gezählt. Zum Zeitpunkt des Ansetzens sind es 18 Bakterien, einen Tag später 25, am Folgetag 30 usw., siehe folgende Tabelle:

t (in Tagen)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N (Anzahl Bakterien)	18	25	30	45	65	90	130	180	250	350	500

Gesucht wird eine Funktion $N(t)$, die das Bakterienwachstum möglichst gut beschreibt. Wir gehen vor wie bisher, lassen uns allerdings die Routine-Rechenaufgaben vom Computer abnehmen. Dazu benutzen wir ein Tabellenkalkulationsprogramm (zum Beispiel Microsoft Excel; die Bedienung von anderen, kostenlosen Tabellenkalkulationsprogrammen wie OpenOffice Calc, KOffice KSpread, GNU Office Gnumeric oder Google Text & Tabellen ist aber sehr ähnlich).



1) Eingabe

Die einzelnen Tabellenfelder eines Arbeitsblattes in einer Tabellenkalkulation sind nach Zeilen und Spalten durchnummeriert. Die Zeilen werden mit Zahlen bezeichnet, die Spalten mit Buchstaben. Wie bei „Schiffe versenken“ hat somit jedes Feld einen eindeutigen Namen, z.B. A1 oder C23.

Um etwas in eins dieser Felder einzugeben, machst du einen Doppelklick auf dieses Feld. Alternativ kannst du es auch mit einem Einfachklick markieren und dann in die Eingabezeile ① klicken.

2) Einfache Bezüge zwischen Zellen

Wir wollen nun unsere oben auf dieser Seite angegebene Messwerttabelle in Excel eintippen. Allerdings vertauschen wir dabei Zeilen und Spalten, da längere Datensätze üblicherweise aufgrund besserer Übersichtlichkeit in Spalten angeordnet werden.

Unsere Tabelle soll also in der Spalte A die Anzahl Tage seit Ansetzen der Bakterienkultur enthalten, die Zahlen von 0 bis 10 in Schritten von 1. Hierbei kann uns Excel durch Formelberechnungen einiges an Tipparbeit abnehmen.

Zunächst schreiben wir aber in die erste Zeile die Tabellenbeschriftung:

In Feld A1 schreiben wir

- t ↵

und in Feld B1

- $N(t)$ ↵

In Feld A2 kommt der Startwert

- 0 ↵

Nun geben wir nicht alle folgenden t-Werte per Hand ein, sondern lassen Excel diese berechnen.

Dazu geben wir in Feld A3 ein:

- $=A2+1$ ↵

Excel setzt zur Berechnung dieser Formel für „A2“ die Zahl ein, die im entsprechenden Tabellenfeld steht (in unserem Fall 0, also rechnet Excel $0+1 = 1$). „A2“ wird wie ein Variablenname behandelt.

Nun kopieren wir die Formel in die darauffolgenden Felder A4 bis A12. Dies geht auf mehrere Arten: Am einfachsten ist es, Feld A3 zu markieren und danach mit der Maus das kleine schwarze Quadrat rechts unten am Feldrahmen zu greifen und nach unten zu ziehen. Sobald die Felder A4 bis A12 mit umrahmt sind, lässt man die Maustaste los, und Excel füllt die umrahmten Felder mit der gleichen Formel aus, die im ursprünglich markierten Feld stand. Eine andere Möglichkeit ist, mittels „Bearbeiten“ → „Kopieren“ im Menü oder mit Strg+C den Inhalt des Feldes A3 zu kopieren, dann die Felder A4 bis A12 zu markieren und mit „Bearbeiten“ → „Einfügen“ oder Strg+V die Formel dort einzufügen.

Wichtig:

Die „Adresse“, auf die sich die Formel bezieht, „wandert“ mit der Formel mit. Während in Feld A3 stand $=A2+1$, steht in Feld A11 $=A10+1$. Die Formel bezieht sich also immer auf das Feld direkt oberhalb von ihr, somit erhält jedes Feld einen Zahlenwert, der um 1 größer ist als der im Feld darüber – wir erhalten eine Reihe von 0 bis 10.

Beim Kopieren von Zellen muss man immer aufpassen, dass sich nicht unbemerkt Fehler einschleichen, da nicht die Zahlenwerte kopiert werden, sondern die Formeln, die sich auf benachbarte Zellinhalte beziehen.

In die Spalte B kommt nun die Anzahl N der Bakterien, die jeweils am Tag t gezählt wurden (unsere Messwerte). Diese müssen wir einzeln abtippen.

3) Formelberechnungen, einfache eingebaute Funktionen

Um den Wachstumsfaktor a zu bestimmen, möchten wir jeweils zwei zeitlich aufeinanderfolgende Messwerte durcheinander teilen:

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{b \cdot a^{t+1}}{b \cdot a^t} = a$$

Diese in jeder Zeile gleiche Rechnung können wir wieder durch das Kopieren und Einfügen einer einzelnen Formel erledigen:

In Feld C2 schreiben wir

- $=B3/B2$ ↵

und kopieren diese Formel in die Felder C3 bis C11. C12 bleibt leer, da es keinen Wert $N(11)$ gibt.

Als Tabellenkopf beschriften wir Feld C1 mit

- $a = N(t+1)/N(t)$ ↵

Wir möchten für unsere Modellfunktion als Parameter a gerne den Mittelwert aus den so bestimmten Werten verwenden. Also lassen wir Excel diesen Mittelwert berechnen:

In Feld C13 schreiben wir

- $=MITTELWERT($

noch ohne Return am Ende, und markieren mit der Maus die Felder C2 bis C11. Excel ergänzt dann die Formel zu $=MITTELWERT(C2:C11)$, und wir müssen nur noch die schließende Klammer und Return eingeben, damit der Durchschnittswert aus den markierten Zellen berechnet wird. Die

Doppelpunkt-Schreibweise C2:C11 steht für den gesamten Bereich zwischen den angegebenen Feldern. Alternativ (aber umständlich) hätte man auch C2;C3;C4;C5;C6;C7;C8;C9;C10;C11 schreiben können.

In Spalte D wollen wir nun den Anfangswert b berechnen. Als Tabellenkopf schreiben wir in Feld D1:

- $b = f(t) / a^t$ ↵

und ins darunterliegende Feld D2 die entsprechende Formel:

- $=B2/C\$13^A2$ ↵

Hier schreiben wir ein Dollar-Zeichen vor die Zeilennummer 13, damit beim Kopieren der Formel in die darunterliegenden Felder D3 bis D12 diese Zeilennummer NICHT mit verschoben wird. So lautet die Formel in Feld D3 „ $=B3/C\$13^A3$ “, in Feld D4 „ $=B4/C\$13^A4$ “ usw. Die Zeilenzahlen ohne Dollarzeichen laufen mit, die mit Dollarzeichen bleiben fixiert – wir wollen ja immer das gleiche a , nämlich den Mittelwert, der in Zeile 13 steht, verwenden.

Auch zu den so bestimmten b -Werten wollen wir den Durchschnitt berechnen. Dazu geben wir in Feld D13 ein:

- $=MITTELWERT(D2:D12)$ ↵

Nun haben wir sowohl a als auch b und somit unsere Modellfunktion $\tilde{N}(t) = b \cdot a^t$ bestimmt.

Um die Messwerte $N(t)$ mit den von der Modellfunktion $\tilde{N}(t)$ gelieferten Werten zu vergleichen, lassen wir uns letztere Werte noch in Tabellenspalte E anzeigen. Als Tabellenkopf schreiben wir in Feld E1:

- $N\sim(t)$ ↵

und als Formel in Feld E2:

- $=D\$13*C\13^A2 ↵

was wir in die Felder E3 bis E12 kopieren.

Excel kennt übrigens eine Menge mathematischer Formeln und anderer hilfreicher Funktionen, z.B. SIN(), COS(), TAN(), ABS() (Betrag), WURZEL(), RUNDEN(), ABRUNDEN(), AUFRUNDEN(), PI() (muss mit leeren Klammern eingegeben werden), GGT(), KGV(), MIN(), MAX(), SUMME(), MITTELWERT()...

4) Graphen

Natürlich wollen wir auch graphisch sehen, wie gut oder schlecht unsere Modellfunktion die Messwerte annähert. Markiere dazu zunächst den Zellbereich von A1 bis B12 (also die ursprüngliche Tabelle der Messwerte), und anschließend mit gedrückter Strg-Taste den Bereich E1 bis E12 (unsere Modellfunktion). Klicke dann auf das Diagramm-Symbol  und wähle im nun erscheinenden Diagramm-Assistenten das „Punkt(XY)“-Diagramm, und dort den ersten Untertyp („Punkte. Vergleicht Punkte paarweise.“). Klicke dann auf „Fertig“. Das nun auf der Seite erscheinende Diagramm kann mit der Maus an eine Stelle geschoben werden, wo es die Wertetabelle nicht verdeckt. Excel hat selbständig erkannt, dass es sich bei der ersten Spalte um die x - bzw. t -Werte handelt, und dass die erste Zeile die Beschriftung der Spalten darstellt.

Damit die Modellfunktion nicht als einzelne Punkte angezeigt wird, wie die Messpunkte, sondern als durchgezogene Linie, machen wir einen Rechtsklick auf einen ihrer Datenpunkte im Diagramm. Im erscheinenden Kontextmenü wählen wir „Diagrammtyp“ und dort den Diagrammuntertyp „Punkte mit interpolierten Linien ohne Datenpunkte“.

Mit Hilfe des Kontextmenüs können Farbe und Form von Linien und Punkten sowie des Diagrammhintergrunds angepasst werden. Probiere die Punkte „Diagrammoptionen...“, „Zeichnungsfläche formatieren...“ und „Datenreihen formatieren...“ aus und verändere die Darstellung nach deinem Geschmack.