Übungsaufgaben Logarithmus

1) Potenzrechnung und Wurzeln

- $x^{\frac{2}{3}} = 4$ .... $x = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4}^3 = 8$
- $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ .... $= x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}}$ .... $= \left(\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{8}$
- $5^x \cdot 5^{2x}$ .... $= 5^{x+2x} = 5^{3x}$

2) Gleichungen und Äquivalenzumformungen

$\frac{1}{3} \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 9 = 0$ — Was passiert beim Ausführen der angegebenen Operationen?

- $|\ : 5^{2x};\ : 5^x$ .... $\frac{1}{3\cdot 5^x} + \frac{2}{5^{2x}} - \frac{9}{5^{3x}}$
- $|\ +9;\ : 5^x$ .... $\frac{1}{3}\cdot 5^x + 2 = \frac{9}{5^x}$
- $|\ : 5^{2x}$ .... $\frac{1}{3} + 2\cdot 5^{-x} - 9\cdot 5^{-2x} = 0$
- $|\ +9;\ \log_5()$ .... $\log_5\left(\frac{1}{3}\cdot 5^{2x} + 2\cdot 5^x\right) = \log_5(9)$
  .... li. Seite könnte man höchstens noch so umformen:
  .... $\log_5\left(5^x \cdot \left(\frac{1}{3}\cdot 5^x + 2\right)\right) = x + \log_5\left(\frac{1}{3}\cdot 5^x + 2\right)$

Wie muss ich die Gleichung lösen? .... Substitution: $u := 5^x,\ u^2 = 5^{2x}$
.... $\Rightarrow \frac{1}{3}u^2 + 2u - 9 = 0$
.... $\Rightarrow u_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -9 \end{cases} \quad \Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} \log_5(3) \\ \log_5(-9)\ \lightning \end{cases}$

3) Wann brauche ich den Logarithmus?

- $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt{5}$ .... nein: $x = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} = 5^{\frac{5}{4}}$
- $5^x = 7^{2x}$ .... ja: $x \cdot \lg 5 = 2x \cdot \lg 7 \ \Rightarrow\ x = 0$
- $x^2 + x = 6$ .... nein: $x^2 + x - 6 = 0$, dann Mitternachtsformel $\Rightarrow\ x_1 = 2,\ x_2 = -3$
- $\sqrt[x]{7} = 49$ .... ja: $7^{\frac{1}{x}} = 49 \ \Rightarrow\ \frac{1}{x} = \log_7 49 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{\log_7 49}$
- $2^x + 4^x = 72$ .... jein: erst Substitution nötig: $2^x + 2^{2x} = 72 \ \Rightarrow\ u + u^2 = 72$,
  .... quadr. Gl. lösen, rücksubstituieren, DANN log bilden.
  .... (Lösung: $u_{1,2} = \begin{cases} 8 \\ -9 \end{cases} \quad \Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} \log_2(8) = 3 \\ \log_2(-9)\ \lightning \end{cases}$

4) Was passiert, wenn ich die angegebene Rechenoperation durchführe?

- $3^x = 8^{\sqrt{x}} \quad | \ \lg()$ .... $x \cdot \lg 3 = \sqrt{x} \cdot \lg 8$
- $3^{2x} = 8^x \quad | \ : x$ .... $\frac{3^{2x}}{x} = \frac{8^x}{x}$
- $3^x = 8 \quad | \ \sqrt[3]{\ }$ .... $3^{\frac{x}{3}} = 2$
- $3^{2x} = 8^x \quad | \ \sqrt[x]{\ }$ .... $3^2 = 8$ (f)

  ...... (Lösung $x = 0$ geht verloren, denn $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$ Umformung nur für $x \neq 0$ erlaubt)

5) Was kann ich hier vereinfachen?

- $3 \cdot 7^x + 3 \cdot 5^x$ .... $= 3 \cdot (7^x + 5^x)$, NICHT $(7+5)^x$
- $2 \cdot \log_3 \sqrt{5}$ .... $= \log_3 \sqrt{5}^2 = \log_3 5$
- $(\lg 8)^2$ .... geht nicht einfacher! $\lg 8 \cdot \lg 8$
- $\frac{a^5}{a^7}$ .... $= a^5 \cdot a^{-7} = a^{5-7} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $\frac{a^5}{b^5}$ .... $= \left(\frac{a}{b}\right)^5$
- $\frac{\log_2 x}{\log_2 y}$ .... geht nicht einfacher!
- $\log_2 x - \log_2 y$ .... $= \log_2 \frac{x}{y}$
- $x^2 + x^{\frac{1}{2}}$ .... $= x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)$
- $x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ .... $= x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$
- $(a+b)^x$ .... geht nicht einfacher! NICHT $a^x + b^x$ (Beispiel $x = 2$: binomische Formel)

6) Weitere Beispielaufgaben

- $\lg 2$ sei bekannt. Wie kann man daraus $\lg 32$ berechnen? .... $\lg 32 = \lg 2^5 = 5 \cdot \lg 2$
- $\log_{2x} \sqrt[3]{7} = 1$ .... $2x = \sqrt[3]{7} \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$
- $\log_3 \frac{x^2}{2} + 4 \log_3 \sqrt{x} - \log_3 8 = 0$ .... $\log_3 \left(\frac{x^2}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{8}\right) = 0$

  .... $\Rightarrow \ \log_3 \frac{x^4}{16} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^4}{16} = 1 \ \Rightarrow \ x^4 = 16$

  .... $\Rightarrow \ x^2 = \pm 4 \ \Rightarrow \ x = \begin{cases} \pm 2 \\ ↯ \end{cases}$
- Schnittpunkt von $f(x) = \log_{\sqrt{1+x^2}}(x)$ und $g(x) = \log_{(\pi^{0,7} \cdot 10^{-10})}(x)$? ....

  .... Alle Logarithmusfunktionen schneiden sich in P(1—0)
- $\frac{1}{4} \cdot 7^{\frac{2}{x}} - 3 \cdot 7^{\frac{1}{x}} + 5 = 0$ .... Substitution: $u := 7^{\frac{1}{x}}, \ u^2 = 7^{\frac{2}{x}}$

  .... $\Rightarrow \ \frac{1}{4}u^2 - 3u + 5 = 0 \ \Rightarrow \ u_{1,2} = \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases} \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \begin{cases} \log_7 8 \\ \log_7 4 \end{cases}$