Kreisbewegung: Die Zentripetalbeschleunigung und –kraft

Du sollst die Herleitung der Formel für die Zentripetalbeschleunigung nachvollziehen, indem du den aufgehängten Zetteln folgst. Gehe erst dann zur nächsten Station weiter, wenn du dir eine Antwort auf die jeweils gestellten Fragen überlegt hast, mit der du selbst zufrieden bist. Lass dir ggf. von deinen Mitschülern helfen, die schon eine Station weiter sind.

Wenn du bis ans Ende gekommen bist, gehe zurück und hilf denjenigen, die noch am weitesten hinten sind. Das Ziel ist, dass bis zum Ende der Stunde alle am Ende angekommen sind.

Station 1 ist in 3 Teile a/b/c geteilt, die in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können.

<u>Liste der Stationen:</u>

1a: Wiederholung Mathematik 8.Klasse: Ähnliche Dreiecke
1b: Wiederholung Mathematik 7.Klasse: paarweise aufeinander senkrecht stehende Schenkel
1c: Wiederholung Physik 7.- 9.Klasse Mechanik: Geschwindigkeits- und Kraftpfeile („Vektoren“)
2: Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsänderung auf der Kreisbahn
3: Beziehung zwischen Δv und Δs
4: Division durch Zeitspanne Δt
5: Verkleinerung der Zeitspanne
6: Formel für die Zentripetalbeschleunigung
7: Formel für die Zentripetalkraft
8: Was ist die Zentrifugalkraft?

<u>Notizen:</u>

Zentripetalbeschleunigung (2 Formeln):

Zentripetalkraft (2 Formeln):

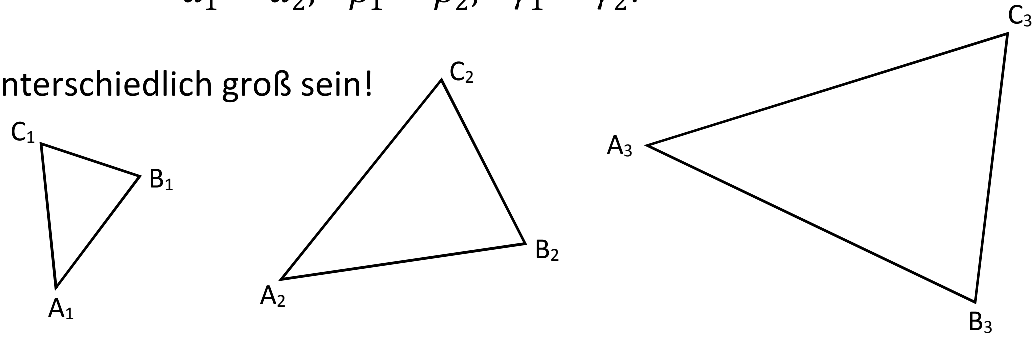
Skizze(n):

Station 1a: Wiederholung Mathematik 8.Klasse: Ähnliche Dreiecke

Zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ heißen **ähnlich**, wenn für ihre Innenwinkel gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Sie können unterschiedlich groß sein!



Aber das **Verhältnis** ihrer Seitenlängen ist gleich.

Es gilt einerseits für das Größenverhältnis zwischen Dreieck 1 und Dreieck 2:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

und andererseits für die Verhältnisse der Seiten innerhalb der Dreiecke:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \qquad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}, \qquad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$$

Aufgaben:

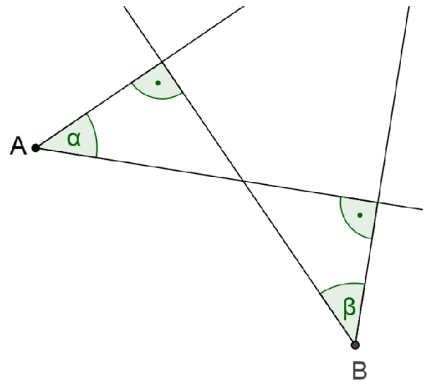
1. Die Seiten eines großen Dreiecks sind jeweils dreimal so lang wie die Seiten eines kleinen Dreiecks. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke zueinander? Mach dir ruhig eine Skizze.

2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen „ähnlich“ und „kongruent“? Sind zwei kongruente Dreiecke automatisch auch ähnlich? Sind zwei ähnliche Dreiecke automatisch auch kongruent?

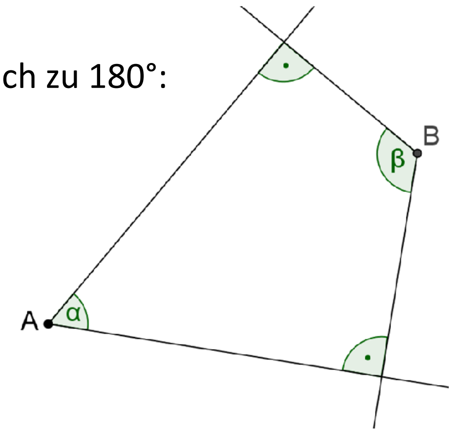
3. Für die Seitenlängen zweier Dreiecke 1 und 2 gelten jeweils die folgenden Beziehungen. Entscheide, ob die Dreiecke kongruent oder ähnlich sein müssen, oder ob es aus den gegebenen Beziehungen nicht zwangsläufig folgt.
   a) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ und $\gamma_1 = \gamma_2$
   b) $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ und $c_1 = c_2$
   c) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$
   d) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ und $b_1 = b_2$

Station 1b: Wiederholung Mathematik 7.Klasse: paarweise aufeinander senkrecht stehende Schenkel

Wenn die Schenkel zweier Winkel α und β paarweise aufeinander senkrecht stehen, dann sind sie entweder gleich groß:



oder sie ergänzen sich zu 180°:



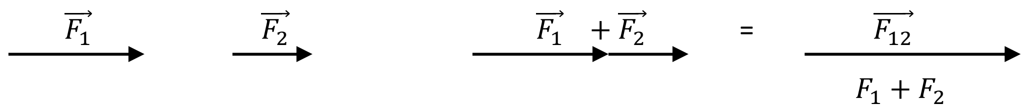
Der erste Fall lässt sich beweisen, indem man den Scheitelwinkel in der Mitte betrachtet. Die zwei sichtbaren Dreiecke haben jeweils einen 90°-Winkel und den Scheitelwinkel gemeinsam. Dann muss auch der dritte Winkel gleich groß sein, es handelt sich um ähnliche Dreiecke (die Seitenlängen müssen nicht gleich lang sein!)

Im zweiten Fall argumentiert man mit der Winkelsumme im Viereck, die 360° beträgt. Da zwei der Viereckswinkel 90° haben, müssen die anderen beiden zusammen 180° betragen.

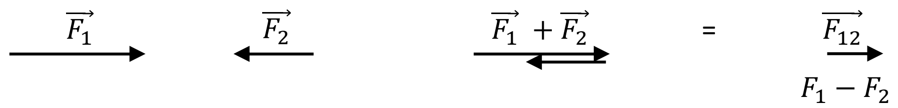
Station 1c: Wiederholung Physik 7.- 9.Klasse Mechanik: Geschwindigkeits- und Kraftpfeile („Vektoren“)

Physikalische Größen lassen sich in zwei Gruppen teilen. Bei den einen kommt es nur auf den Zahlenwert (Betrag) an, z.B. bei der Zeit oder der Masse.
Zwei Massen werden addiert, indem man die Zahlenwerte einfach zusammenzählt (vorausgesetzt, man rechnet zuvor in die gleiche Einheit um).

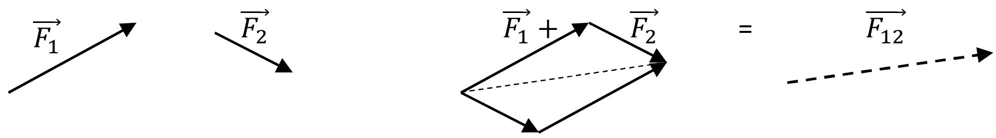
Bei anderen Größen ist zusätzlich eine Information über die Richtung wichtig, z.B. bei der Geschwindigkeit oder der Kraft.
Die simple Addition der Zahlenwerte zweier Kräfte ist nur dann erlaubt, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen.



Zeigen sie in genau entgegengesetzte Richtung, dann bedeutet die Addition der Kräftevektoren eine Subtraktion der Zahlenwerte (Beträge) voneinander.



Schließen sie einen anderen Winkel ein, dann muss man mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms die resultierende Gesamtkraft bestimmen.



In den Klassen 7-8 ermittelt man diese Gesamtkraft zeichnerisch, sobald die Winkelfunktionen sin, cos und tan bekannt sind, können solche Gesamtkräfte aber auch algebraisch berechnet werden.

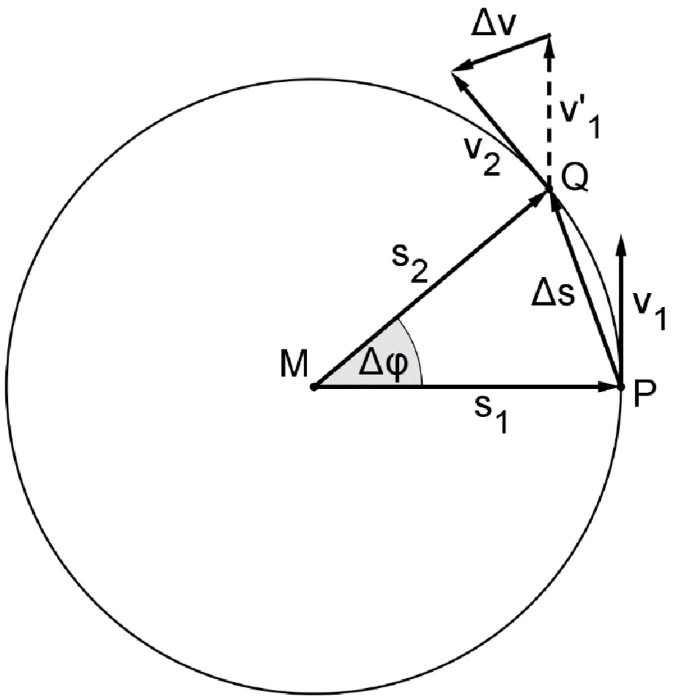
<u>Aufgaben</u>:

1. Teile die folgenden physikalischen Größen in „skalare“ (Zahlenwerte ohne Richtung) und „vektorielle“ (mit Richtung) ein:
   Ort, Flächeninhalt, Volumen, Beschleunigung, Energie, Impuls, Temperatur

2. Die Kraft $\overrightarrow{F_1}$ mit Betrag 33 N und die Kraft $\overrightarrow{F_2}$ mit Betrag 44 N stehen senkrecht aufeinander. Wie groß ist die resultierende Gesamtkraft $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$?
   (Ist durch Rechnung exakt lösbar; eine Skizze hilft aber dem Verständnis).

Station 2: Bahngeschwindigkeit und Geschwindigkeitsänderung auf der Kreisbahn

Wir betrachten die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn mit Radius r um einen Mittelpunkt M.



Zum Zeitpunkt t_1 befindet sich der Körper am Punkt P,
zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ am Punkt Q.

Zum Zeitpunkt t_1 hat der Körper die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_1$,
zum Zeitpunkt t_2 die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$.

Achtung: Der <u>Betrag</u> der Bahngeschwindigkeit (also die Länge des Pfeils) ändert sich nicht, nur ihre Richtung!

Die Änderung des Orts wird durch den Ortsdifferenzvektor $\Delta\vec{s}$ beschrieben,
die Änderung der Bahngeschwindigkeit durch den Differenzvektor $\Delta\vec{v}$.

Je größer die Zeitdifferenz Δt ist, desto größer sind der Winkel $\Delta\varphi$ und desto länger ist der Ortsdifferenzvektor $\Delta\vec{s}$.

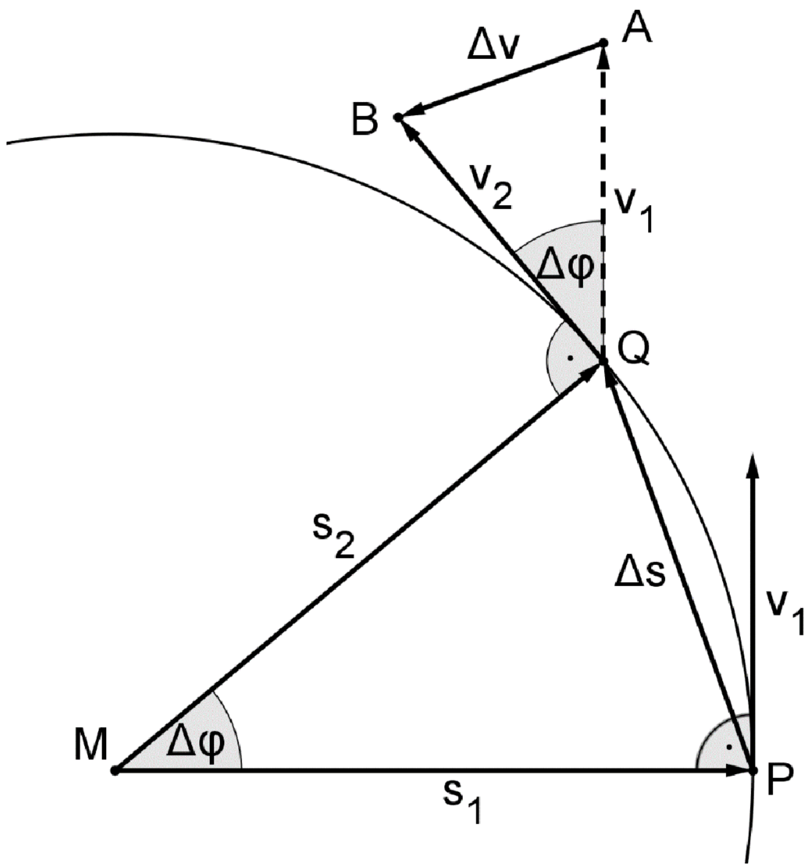
Der wirklich zurückgelegte Weg ist aber etwas größer als die Länge von $\Delta\vec{s}$:
Statt auf direktem Weg von P nach Q zu gelangen, legt der Körper eine Strecke auf dem Kreisbogen zurück.

Station 3: Beziehung zwischen Δv und Δs

Die beiden Dreiecke ΔMPQ und ΔQAB sind beide gleichschenklig:

Die Länge der Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ beträgt jeweils r (Kreisradius),
die Länge der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ beträgt jeweils v (Bahngeschwindigkeit).

Zwischen den gleich langen Schenkeln haben beide Dreiecke jeweils den gleichen Winkel $\Delta\varphi$, da $\vec{v}_1$ auf $\vec{s}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ auf $\vec{s}_2$ senkrecht steht.



Die Dreiecke sind also ähnlich zueinander.

Somit stehen ihre Seiten im gleichen Verhältnis zueinander, und es gilt unter anderem die Beziehung:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r}$$

Station 4: Division durch Zeitspanne Δt

Im Folgenden geht es lediglich um Umformungen der im letzten Schritt hergeleiteten Gleichung:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r}$$

Zunächst multiplizieren wir mit v, um es auf die rechte Seite zu bekommen:

$$\Delta v = \frac{v \cdot \Delta s}{r}$$

Dann dividieren wir beide Seiten durch Δt:

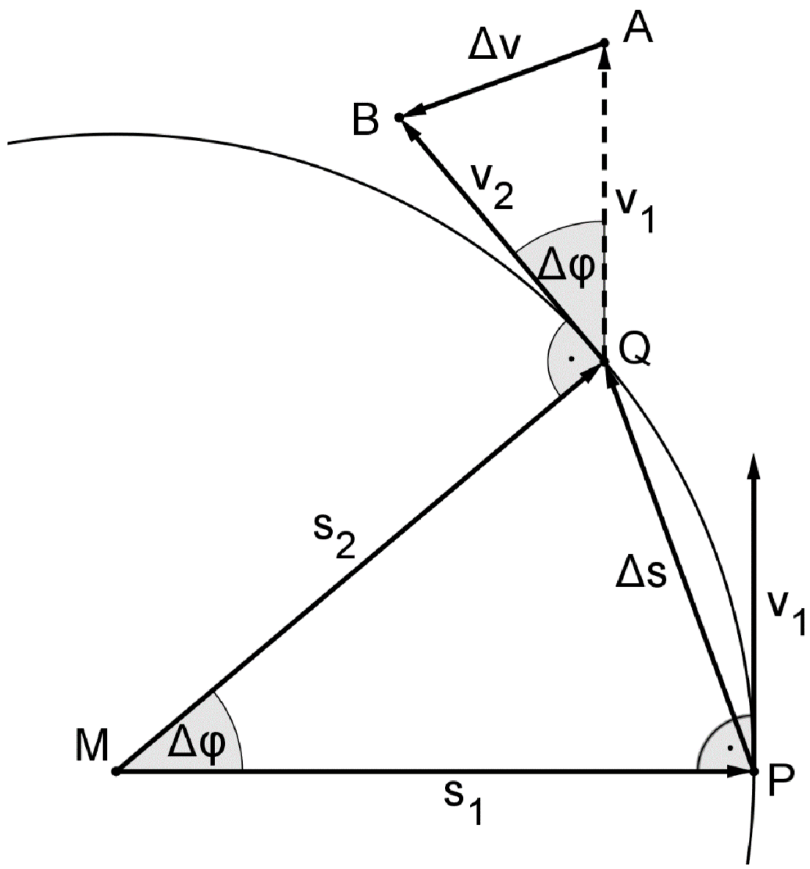
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wozu der letzte Schritt dient, werden wir gleich sehen. Aber vielleicht könnt ihr es schon vermuten.

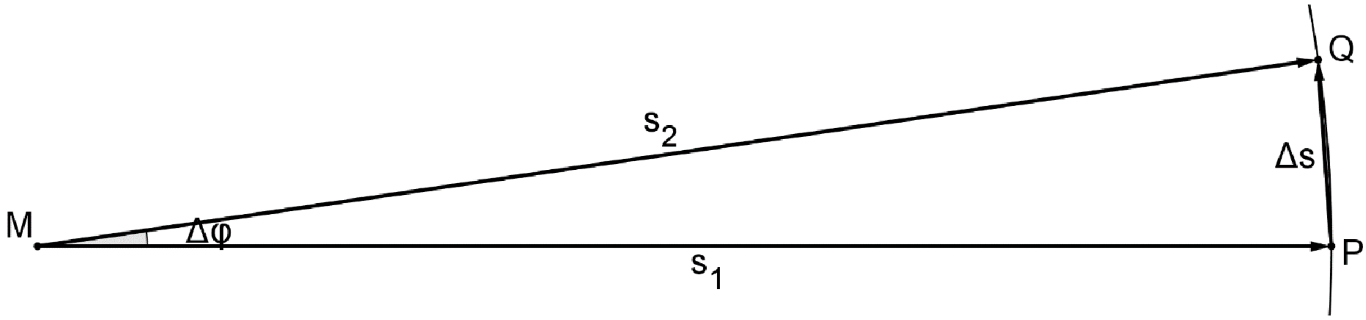
Station 5: Verkleinerung der Zeitspanne

Wird die Zeitspanne Δt sehr klein gewählt, so besteht kaum mehr ein Unterschied zwischen der direkten Verbindung Δs zwischen den beiden Punkten P und Q und der wirklich vom kreisenden Körper zurückgelegten Strecke auf dem Kreisbogen.

Große Zeitspanne: Δs ist kürzer als die Strecke auf dem Kreisbogen:



Kleine Zeitspanne (hineingezoomt): Δs entspricht quasi der Kreisbogenstrecke:



In der kurzen Zeitspanne Δt legt also der Körper auf der Kreisbahn näherungsweise die Strecke Δs zurück, seine Bahngeschwindigkeit beträgt somit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Station 6: Formel für die Zentripetalbeschleunigung

Wenn wir kurze Zeitspannen betrachten, gilt also

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

Analog gilt, dass die Änderung Δv der Bahngeschwindigkeit pro Zeitspanne Δt der Beschleunigung a entspricht, die auf den kreisenden Körper wirkt:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

Dies können wir verwenden, um die in Station 4 umgeformte Gleichung

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

zu vereinfachen:

$$a = \frac{v}{r} \cdot v$$

Noch weiter zusammengefasst erhalten wir die Formel für die sogenannte <u>Zentripetalbeschleunigung</u>:

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$

<u>Aufgaben</u>:

1. Sucht eine alternative Formel für a, indem ihr die Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ausdrückt.

2. Welche Zentripetalbeschleunigung wirkt auf die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne? Der mittlere Abstand von der Erde zur Sonne wird als AE (Astronomische Einheit) bezeichnet und kann hinten im Schulbuch nachgeschlagen werden.

Station 7: Formel für die Zentripetalkraft

Wenn auf einen Körper eine Kraft F wirkt, so erfährt er die zugehörige Beschleunigung $a = \frac{F}{m}$.

Oder umgekehrt:
Damit ein Körper eine Beschleunigung a erfährt, muss auf ihn eine Kraft $F = m \cdot a$ wirken.

In unserem Fall gehört zur Zentripetalbeschleunigung $a = \frac{v^2}{r}$ die <u>Zentripetalkraft</u>

$$\boxed{F_Z = m\frac{v^2}{r}}$$

<u>Aufgaben</u>:

1. Sucht eine alternative Formel für F_Z, indem ihr die Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ausdrückt.

2. Berechnet die Anziehungskraft der Sonne auf die Erde sowie die Anziehungskraft der Erde auf den Mond. Die hierfür nötigen Entfernungen und Massen finden sich hinten im Buch.

Station 8: Was ist die Zentri*fugal*kraft (Fliehkraft)?

Trägheitsgesetz:

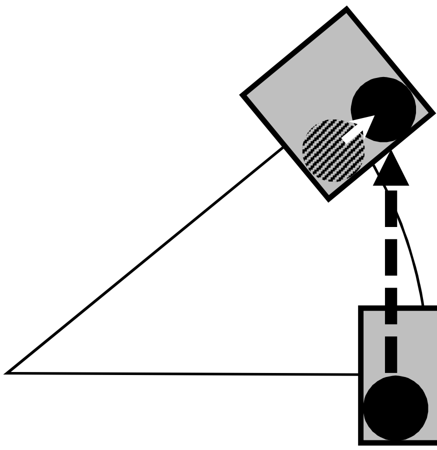
Solange keine resultierende Kraft auf ihn einwirkt, bewegt sich ein Körper geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn fortbewegt, muss auf ihn ständig eine Kraft in Richtung Kreismittelpunkt wirken, die Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$.

Diese steht immer senkrecht auf der aktuellen Geschwindigkeitsrichtung. Dadurch ändert sie nicht den Betrag der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$, sondern nur deren Richtung.

Bewegen wir uns im Kreis um ein Zentrum, z.B. im Kettenkarussell oder im Rotor auf dem Oktoberfest, so werden wir nach außen gedrückt. Wir fühlen eine Zentrifugalkraft $\vec{F}_F$.

Dabei handelt es sich aber nur um eine sogenannte Scheinkraft oder Trägheitskraft innerhalb des sich mit uns mitrotierenden Bezugssystems. Sie entsteht aufgrund der Massenträgheit: Unser Körper „möchte“ sich geradlinig weiter fortbewegen, der Raum/Sitz, in dem wir uns befinden, bewegt sich aber seitlich weg, so dass wir scheinbar in die Ecke gedrückt werden.



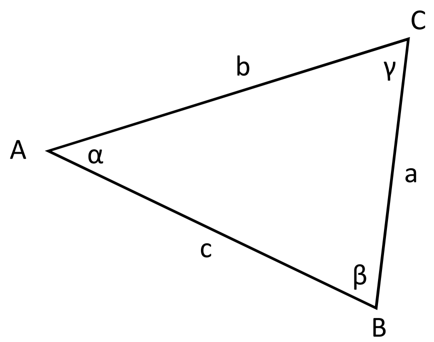
Die Zentrifugal-Scheinkraft wirkt genau entgegengesetzt zur Zentripetalkraft und ist betragsmäßig gleich groß. Im mit uns mitrotierenden Bezugssystem heben sich Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft also gegenseitig auf, d.h. wir bleiben an der gleichen Stelle im Raum/Sitz und bewegen uns relativ zu diesem Bezugssystem nicht.

Aufgabe:

Aufgrund der Rotation der Erde um sich selbst erfahren wir eine Fliehkraft, die uns entgegen der Anziehungskraft der Erde nach oben hebt. Diese ist am größten am Äquator, da dort die Bahngeschwindigkeit am größten ist. Berechne die aufgrund der Fliehkraft resultierende Beschleunigung nach außen (hierfür nötige Werte finden sich hinten im Buch) und zeige, dass diese deutlich kleiner ist als die nach innen wirkende Fallbeschleunigung aufgrund der Schwerkraft der Erde.

Lösungen

Station 1a:

1. Der Flächeninhalt des großen Dreiecks ist 9x so groß wie der des kleinen.
2. „Kongruent“ heißt deckungsgleich, es müssen also nicht nur alle Winkel von paarweise übereinstimmen, sondern auch alle Seitenlängen. Bei ähnlichen Dreiecken kann sich die Größe der Figur ändern, die Form bleibt aber gleich. Zwei kongruente Dreiecke sind automatisch auch ähnlich zueinander.
Zwei ähnliche Dreiecke sind im Allgemeinen nicht kongruent.
3. 

a) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ und $\gamma_1 = \gamma_2$ ⇨ ähnlich

b) $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ und $c_1 = c_2$
⇨ gleichschenklig, gleiche Basis ⇨ ähnlich

c) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ⇨ ähnlich

d) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ und $b_1 = b_2$
⇨ kongruent (SWW)

Station 1c:

1. Skalare: Flächeninhalt, Volumen, Energie, Temperatur
Vektoren: Ort, Beschleunigung, Impuls
2. Die Länge der Diagonale des resultierenden Parallelogramms (das aufgrund des rechten Winkels ein Rechteck ist) kann man mit dem Satz des Pythagoras berechnen: $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \sqrt{(33\ \mathrm{N})^2 + (44\ \mathrm{N})^2} = 55\ \mathrm{N}$.

Station 6:

1. Mit $v = r\omega$ folgt $a = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$.
2. $r = 1\ \mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$
$\Rightarrow\ a = r\omega^2 = 0{,}0059\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Station 7:

1. Mit $v = r\omega$ folgt $F_Z = ma = m\frac{r^2\omega^2}{r} = mr\omega^2$.
2. Sonne-Erde: $m_E = 5{,}977 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}$; $r = 1\ \mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$;
$\omega = \frac{2\pi}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow\ F_Z = mr\omega^2 = 3{,}54 \cdot 10^{25}\ \mathrm{N}$
Erde-Mond: $m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$; $r = 384400\ \mathrm{km} = 3{,}844 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$;
$\omega = \frac{2\pi}{27{,}32 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = 2{,}66 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow\ F_Z = mr\omega^2 = 2{,}00 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N}$

Station 8:

$r = 6368\ \mathrm{km} = 6{,}368 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$; $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$
$\Rightarrow\ a = r\omega^2 = 0{,}0337\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ⇨ ändert nur die letzte Stelle von $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$